Sur l'interpolation.

Dans les applications de l'analyse à la géométrie, à la physique, à l'astronomie... deux sortes de questions se présentent à résoudre et il s'agit 1° de trouver les lois générales des figures ou des phénomènes, c'est à dire, la forme générale des équations qui existent entre les diverses variables, par exemple, entre les coordonnées des courbes et des surfaces, entre les vitesses, les temps, les espaces parcourus par les mobiles, etc... ; 2° de fixer en nombres les valeurs des paramètres ou constantes arbitraires qui entrent dans l'expression de ces mêmes lois, c'est à dire, les valeurs des coefficients inconnus que renferment les équations trouvées. Parmi les variables on distingue ordinairement, comme l'on sait, celles qui peuvent varier indépendamment les unes des autres, et que l'on nomme pour cette raison variables indépendantes, d'avec celles qui s'en déduisent par la résolution des diverses équations, et qui se nomment fonctions des variables indépendantes. Considérons en particulier une de ces fonctions, et supposons qu'elle se déduise des variables indépendantes par une équation ou formule qui renferme un certain nombre de coefficients. Un pareil nombre d'observations

ou d'expériences, dont chacune fournira une valeur particulière de la fonction correspondante à un système particulier de valeurs des variables indépendantes, suffira pour la détermination numérique de tous ces coefficients; et, cette détermination faite, on pourra obtenir sans difficulté de nouvelles valeurs de la fonction correspondantes à de nouveaux systèmes de valeurs des variables indépendantes, et résoudre ainsi ce qu'on appelle le problème de l'interpolation. Ainsi, par exemple, si l'ordonnée d'une courbe se trouve exprimée en fonction de l'abscisse par une équation qui renferme trois paramètres, il suffira de connaître trois points de la courbe, c'est à dire, trois valeurs particulières de l'ordonnée correspondantes à trois valeurs particulières de l'abscisse, pour déterminer les trois paramètres; et, cette détermination effectuée, on pourra sans peine tracer la courbe par points en calculant les coordonnées d'un nombre aussi grand que l'on voudra de nouveaux points situés sur les arcs de cette courbe compris entre les points donnés. Ainsi, envisagé dans toute son étendue, le problème de l'interpolation consiste à déterminer les coefficients ou constantes arbitraires que renferme l'expression des lois générales des figures ou des phénomènes, d'après un nombre au moins égal de points donnés ou d'observations ou d'expériences. Dans une foule de questions les

constantes arbitraires entrent au premier degré seulement dans les équations qui les renferment. C'est précisément ce qui arrive, lorsqu'une fonction est développable en une série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes ou descendantes d'une variable indépendante ou bien encore suivant les sinus ou cosinus des multiples d'un même arc. Alors il s'agit de déterminer les coefficients de ceux des termes de la série que l'on ne peut négliger sans avoir à craindre qu'il en résulte une erreur sensible dans les valeurs de la fonction. Dans le petit nombre de formules qui ont été proposées pour cet objet on doit distinguer une formule tirée du calcul des différences finies, mais applicable seulement au cas où les diverses valeurs de la variable indépendante sont équidifférentes entre elles, et la formule de Lagrange applicable, quelles que soient ces valeurs, à des séries ordonnées suivant les puissances ascendantes de la variable indépendante. Toutefois cette dernière formule elle-même se complique de plus en plus à mesure que l'on veut conserver dans le développement de la fonction en série un plus grand nombre de termes; et ce qu'il y a de plus fâcheux, c'est que les valeurs approchées des divers ordres correspondantes aux divers cas où l'on conserverait dans la série un seul terme, puis deux termes, puis trois termes .... s'obtiennent par des calculs à peu près indépendants les uns des autres, en

sorte que chaque nouvelle approximation, loin d'être rendue facile par celles qui la précèdent, demande au contraire plus de temps et de travail. Frappé de ces inconvénients, et conduit par mes recherches sur la dispersion de la lumière à m'occuper de nouveau du problème de l'interpolation, j'ai eu le bonheur de rencontrer pour la solution de ce problème une nouvelle formule qui, sous le double rapport de la certitude des résultats et de la facilité avec laquelle on les obtient, me paraît avoir sur les autres formules des avantages tellement incontestables que je ne doute guères qu'elle ne soit bientôt d'un usage général parmi les personnes adonnées à la culture des sciences physiques et mathématiques.

Pour donner une idée de cette formule je suppose qu'une fonction de x, représentée par y, soit développable en une série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes ou descendantes de x, ou bien encore suivant les sinus ou cosinus des arcs multiples de x, ou même plus généralement suivant d'autres fonctions de x que je représenterai par

$$\varphi(x) = u, \quad \chi(x) = v, \quad \psi(x) = w, \ \ldots$$

en sorte qu'on ait

$$y = au + bv + cw + \ldots \tag{1}$$

$a, b, c \ldots$ désignant des coefficients constants. Il s'agit de savoir 1° combien de termes on doit conserver

dans le second membre de l'équation (1) pour obtenir une valeur de y suffisamment approchée, dont la différence avec la valeur exacte soit insensible et comparable aux erreurs que comportent les observations, 2° de fixer en nombre les coefficients des termes conservés, ou, ce qui revient au même, de trouver la valeur approchée dont nous venons de parler. Les données du problème sont un nombre suffisamment grand de valeurs de y représentées par

$$y_1, y_2 \cdots\cdots y_n,$$

et correspondantes à un pareil nombre n de valeurs de x représentées par $x_1, x_2 \cdots x_n$, par conséquent aussi à un pareil nombre de valeurs de chacune des fonctions u, v, w, ..., valeurs que je représenterai de même par

$$u_1, u_2, \cdots\cdots u_n$$

pour la fonction u, par

$$v_1, v_2, \cdots\cdots v_n$$

pour la fonction v, etc... Ainsi, pour résoudre le problème, on aura entre les coefficients inconnus $a, b, c, \ldots$ les n équations du premier degré

$$(2)\qquad \begin{cases} y_1 = au_1 + bv_1 + cw_1 + \cdots, \\ y_2 = au_2 + bv_2 + cw_2 + \cdots, \\ \vdots \\ y_n = au_n + bv_n + cw_n + \cdots, \end{cases}$$

qui, si l'on désigne par i l'un quelconque des nombres entiers

$$1, 2, \cdots\cdots n,$$

se trouveront toutes comprises dans la formule générale

(3) $$y_i = au_i + bv_i + cw_i + \dots$$

On effectuera la première approximation en négligeant les coefficients $b, c, \dots$, ou, ce qui revient au même, en réduisant la série que renferme l'équation (1) à son premier terme. Alors la valeur générale approchée de y sera

(4) $$y = au,$$

et, pour déterminer le coefficient a, on aura le système des équations

(5) $$y_1 = au_1, \quad y_2 = au_2, \quad \dots\dots \quad y_n = au_n.$$

Les diverses valeurs de a, que l'on peut déduire des équations (5) considérées chacune à part, ou combinées entre elles, seraient toutes précisément égales, si les valeurs particulières de y, que nous supposons données par l'observation, étaient rigoureusement exactes. Mais il n'en est pas ainsi dans la pratique où les observations comportent des erreurs renfermées entre certaines limites; et alors il importe de combiner entre elles les équations (5) de manière que, dans les cas les plus défavorables, l'influence exercée sur la valeur du coefficient a par les erreurs commises sur les valeurs de $y_1, y_2, \dots y_n$ soit la moindre possible. Or les diverses combinaisons que l'on peut faire des équations (5) pour en tirer une nouvelle équation du premier degré par rapport à a, four-

-nissent toutes des valeurs de a comprises dans la formule générale

$$(6) \qquad a = \frac{k_1 y_1 + k_2 y_2 + \cdots + k_n y_n}{k_1 u_1 + k_2 u_2 + \cdots + k_n u_n},$$

que l'on obtient en ajoutant membre à membre les équations (5) respectivement multipliées par des facteurs constants $k_1, k_2 \ldots k_n$. Il y a plus ; comme la valeur de a déterminée par l'équation (6) ne varie pas quand on fait varier simultanément les facteurs $k_1, k_2, \ldots k_n$ dans le même rapport, il est clair que parmi ces facteurs le plus grand (abstraction faite du signe) peut toujours être censé réduit à l'unité. Remarquons enfin que, si l'on nomme

$$\varepsilon_1, \ \varepsilon_2, \ \ldots\ldots \varepsilon_n$$

les erreurs respectivement commises dans les observations sur les valeurs de

$$y_1, \ y_2, \ \ldots\ldots y_n,$$

la formule (6) fournira pour a une valeur approchée dont la différence avec la véritable sera

$$(7) \qquad \frac{k_1 \varepsilon_1 + k_2 \varepsilon_2 + \cdots + k_n \varepsilon_n}{k_1 u_1 + k_2 u_2 + \cdots + k_n u_n}.$$

Il faut maintenant choisir $k_1, k_2, \ldots k_n$ de telle sorte que, dans les cas les plus défavorables, la valeur numérique de l'expression (7) soit la moindre possible.

Représentons par

$$Su_i$$

la somme des diverses valeurs numériques de u_i, c'est à dire, ce que devient le polynome

$$\pm u_1 \pm u_2 \pm \dots \pm u_n$$

quand on y dispose de chaque signe de manière à rendre chaque terme positif. Représentons par $S\varepsilon_i$ non la somme des valeurs numériques de $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n$, mais ce que devient la somme Su_i, quand on y remplace chaque valeur de u_i par la valeur correspondante de ε_i. Si l'on réduit à $+1$ ou à -1 chacun des coefficients $K_1, K_2, \dots K_n$, en choisissant les signes de manière que, dans le dénominateur de la fraction (7) tous les termes soient positifs, cette fraction sera réduite à

$$\frac{S\varepsilon_i}{Su_i}; \tag{8}$$

et elle offrira une valeur numérique tout au plus égale au rapport

$$\frac{\Sigma_o}{Su_i},$$

si l'on désigne par Σ_o la somme des valeurs numériques de ε_i, ou, ce qui revient au même, la valeur numérique de $S\varepsilon_i$ dans le cas le plus défavorable. D'autre part, en attribuant à $K_1, K_2, \dots K_n$ des valeurs inégales dont la plus grande (abstraction faite des signes) soit l'unité, on obtiendra pour dénominateur de la fraction (7) une quantité dont la valeur numérique sera évidemment inférieure à Su_i, tandis que la valeur numérique du numérateur pourra s'élever jusqu'à la limite Σ_o, ce qui arrivera effectivement si les erreurs $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n$

sont toutes nulles à l'exception de celle qui sera multipliée par un facteur égal, au signe près, à l'unité. Il en résulte que la plus grande erreur à craindre sur la valeur de a déterminée par la formule (6) sera la moindre possible si l'on pose généralement

$$k_i = \pm 1,$$

en choisissant les signes de manière que dans le polynome $\quad k_1 u_1 + k_2 u_2 + \dots + k_n u_n$

tous les termes soient positifs. Alors la formule (6) donnera

$$(9) \qquad a = \frac{S y_i}{S u_i},$$

$S y_i$ étant ce que devient la somme $S u_i$ quand on y remplace chaque valeur de u_i par la valeur correspondante de y_i, et l'équation (4) deviendra

$$(10) \qquad y = \frac{u}{S u_i} S y_i .$$

Si l'on fait pour abréger

$$(11) \qquad \alpha = \frac{u}{S u_i}$$

on aura simplement

$$(12) \qquad y = \alpha S y_i .$$

Si l'on supposait généralement $u = 1$, l'équation (4), réduite à $\qquad y = a$

exprimerait que la valeur de y est constante; et, comme on aurait alors

$$\alpha = \frac{u}{S u_i} = \frac{1}{n},$$

la formule (12) donnerait

$$y = \frac{1}{n} S y_i .$$

Donc alors on devrait prendre pour valeur approchée de y la moyenne arithmétique entre les valeurs observées, et la plus grande erreur à craindre serait plus petite pour cette valeur approchée que pour toute autre. Cette propriété des moyennes arithmétiques, jointe à la facilité avec laquelle on les calcule, justifie complètement l'usage où l'on est de leur accorder la préférence dans l'évaluation des constantes arbitraires qui peuvent être déterminées directement par l'observation.

Soit maintenant Δy le reste qui doit compléter la valeur approchée de y fournie par l'équation (12), en sorte qu'on ait

$$(13) \qquad y = \alpha S y_i + \Delta y .$$

Posons de même

$$(14) \qquad v = \alpha S v_i + \Delta v, \quad w = \alpha S w_i + W, \quad \text{etc} \ldots .$$

On tirera de la formule (3)

$$(15) \qquad S y_i = a S u_i + b S v_i + c S w_i + \text{etc} \ldots ,$$

puis de cette dernière, multipliée par α, et soustraite de l'équation (1)

$$(16) \qquad \Delta y = b \Delta v + c \Delta w + \text{etc} \ldots$$

Soient d'ailleurs α_i, Δy_i, Δv_i, Δw_i, ... ce que deviennent les valeurs de α, Δy, Δv, Δw, ... tirées des équations (11), (13) et (14) quand on y remplace x par x_i, i étant l'un des nombres entiers $1, 2 \ldots n$. Si les valeurs de

$$\Delta y_1 , \ \Delta y_2 \ \ldots\ldots \ \Delta y_n$$

sont très petites et comparables aux erreurs que comportent les observations, il sera inutile de procéder à une seconde approximation, et l'on pourra s'en tenir à la valeur approchée de y fournie par l'équation (12). Si le contraire a lieu, il suffira, pour obtenir une approximation nouvelle, d'opérer sur la formule (16), comme dans la première approximation l'on a opéré sur la formule (1). Cela posé, désignons par

$$S'\Delta v_i$$

la somme des valeurs numériques de Δv_i, et par

$$S'\Delta y_i,\quad S'\Delta w_i,\ \text{etc.}\ldots$$

les polynomes dans lesquels se change la somme $S'\Delta v_i$ quand on y remplace chaque valeur de Δv_i par la valeur correspondante de Δy_i ou de Δw_i, ... Soit enfin

$$\mathfrak{C} = \frac{\Delta v}{S'\Delta v_i} \tag{17}$$

Si l'on peut, sans erreur sensible, négliger dans la série (1) le coefficient c du troisième terme et ceux des termes suivants, on devra prendre pour valeur approchée de Δy

$$\Delta y = \mathfrak{C}\, S'\Delta y_i. \tag{18}$$

Soit $\Delta^2 y$ le reste du second ordre qui doit compléter cette valeur approchée, et faisons en conséquence

$$\Delta y = \mathfrak{C}\, S'\Delta y_i + \Delta^2 y. \tag{19}$$

Posons de même

$$\Delta w = \mathfrak{C}\, S'\Delta w_i + \Delta^2 w,\ \text{etc.}\ldots \tag{20}$$

On tirera successivement de la formule (16)

(21) $$\Delta y_i = b\,\Delta v_i + c\,\Delta w_i + \text{etc}\dots$$ et

(22) $$\mathcal{S}'\Delta y_i = b\,\mathcal{S}'\Delta v_i + c\,\mathcal{S}'\Delta w_i + \text{etc}\dots,$$

puis de cette dernière, multipliée par b et retranchée de l'équation (19),

(23) $$\Delta^2 y = c\,\Delta^2 w + \text{etc}\dots.$$

Soient d'ailleurs b_i, $\Delta^2 y_i$, $\Delta^2 w_i$, ... ce que deviennent les valeurs de b, $\Delta^2 y$, $\Delta^2 w$, ... tirées des équations (17), (19) et (20) quand on y remplace x par x_i, i étant l'un des nombres entiers 1, 2, ... n. Si les valeurs de

$$\Delta^2 y_1\,,\quad \Delta^2 y_2\,,\ \dots\ \Delta^2 y_n$$

sont très petites et comparables aux erreurs que comportent les observations, il sera inutile de procéder à une nouvelle approximation, et l'on pourra s'en tenir à la valeur approchée de Δy fournie par l'équation (18). Si le contraire a lieu, il suffira pour obtenir une troisième approximation d'opérer sur la formule (23), comme l'on a opéré dans la première approximation sur la formule (1). En continuant de la sorte, on obtiendra la règle suivante.

L'inconnue y, fonction de la variable x, étant supposée développable en une série convergente

(I) $$au + bv + cw + \dots$$

où u, v, w, ... représentent des fonctions données de la même variable, si l'on connaît n valeurs particulières de y correspondantes à n valeurs particulières

$$x_1,\ x_2\ \dots\dots\ x_n$$

de x, si d'ailleurs on nomme i l'un quelconque des nombres

entiers 1, 2, ... n, et y_i, u_i, v_i, ... ce que deviennent y, u, v, ... quand on y remplace x par x_i, alors, pour obtenir la valeur générale de y avec une approximation suffisante, on déterminera d'abord le coefficient α à l'aide de la formule

(II) $$u = \alpha\, S u_i$$

dans laquelle Su_i désigne la somme des valeurs numériques de u_i, et la différence du premier ordre Δy à l'aide de la formule

(III) $$y = \alpha\, S y_i + \Delta y.$$

Si les valeurs particulières de Δy représentées par Δy_1, Δy_2, ... Δy_n sont comparables aux erreurs d'observation on pourra négliger Δy et réduire la valeur approchée de y à

$$\alpha\, S y_i.$$

Dans le cas contraire, on déterminera 𝓁 à l'aide des formules

(IV) $$v = \alpha\, S v_i + \Delta v, \quad \Delta v = \ell\, S' \Delta v_i,$$

$S'\Delta v_i$ étant la somme des valeurs numériques de Δv_i, et la différence du second ordre $\Delta^2 y$ à l'aide de la formule

(V) $$\Delta y = \ell\, S' \Delta y + \Delta^2 y.$$

Si les valeurs particulières de $\Delta^2 y$ représentées par $\Delta^2 y_1$, $\Delta^2 y_2$ ... $\Delta^2 y_n$ sont comparables aux erreurs d'observation, l'on pourra négliger $\Delta^2 y$ et réduire en conséquence la valeur approchée de y à $\alpha\, S y_i + \ell\, S' \Delta y_i$.

Dans le cas contraire, on déterminera γ par les formules

(VI) $$w = \alpha\, S w_i + \Delta w, \quad \Delta w = \ell\, S' \Delta w_i + \Delta^2 w, \quad \Delta^2 w = \gamma\, S'' \Delta^2 w_i,$$

$S''\Delta^2 w_i$ étant la somme des valeurs numériques de $\Delta^2 w_i$, et la différence du troisième ordre $\Delta^3 y$ par la formule

(VII) $$\Delta^2 y = \gamma S''\Delta^2 y_i + \Delta^3 y.$$

etc.... Ainsi, en définitive, en supposant les coefficients $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ déterminés par le système des équations (II), (IV) (VI), etc..., on devra calculer les différences des divers ordres représentées par $\Delta y, \Delta^2 y, \Delta^3 y, \ldots$ ou plutôt leurs valeurs particulières correspondantes aux valeurs $x_1, x_2 \ldots x_n$ de la variable x, jusqu'à ce que l'on parvienne à une différence dont les valeurs particulières soient comparables aux erreurs d'observation. Alors il suffira d'égaler à zéro la valeur de cette différence tirée du système des équations (III), (V), (VII), ... pour obtenir avec une approximation suffisante la valeur générale de y. Cette valeur générale sera donc

$$y = \alpha S y_i, \text{ ou } y = \alpha S y_i + \beta S'\Delta y_i, \text{ ou etc.} \ldots$$

suivant que l'on pourra sans erreur sensible réduire la série (I) à son premier terme, ou à ses deux premiers termes, ... Donc, si l'on nomme m le nombre des termes conservés, le problème de l'interpolation sera résolu par la formule

(VIII) $$y = \alpha S y_i + \beta S'\Delta y_i + \gamma S''\Delta^2 y_i + \text{etc.} \ldots,$$

le second membre étant prolongé jusqu'au terme qui renferme $\Delta^{m-1} y_i$.

Il est bon d'observer que des formules (II), (III), (IV), (V) (VI), (VII), ... on tire non seulement

(IX) $S\alpha_i = 1$; $S\beta_i = 0$, $S'\beta_i = 1$; $S\gamma_i = 0$, $S'\gamma_i = 0$, $S''\gamma_i = 1$, etc...

mais encore

(X) $S\Delta v_i = 0$; $S\Delta w_i = 0$, $S\Delta^2 w_i = 0$, $S'\Delta^2 w_i = 0$, etc...; et

(XI) $S\Delta y_i = 0$; $S\Delta^2 y_i = 0$, $S'\Delta^2 y_i = 0$; $S\Delta^3 y_i = 0$, $S'\Delta^3 y_i = 0$, $S''\Delta^3 y_i = 0$, ...

Ces dernières formules sont autant d'équations de condition auxquelles doivent satisfaire les valeurs particulières de α, β, γ,... ainsi que celles des différences des divers ordres de u, v, w,... y ; et il en résulte qu'on ne peut commettre dans le calcul de ces valeurs particulières aucune erreur de chiffres sans en être averti par le seul fait que les équations de condition cessent d'être vérifiées.

En résumé les avantages des nouvelles formules d'interpolation sont les suivantes.

1° Elles s'appliquent aux développements en séries, quelle que soit la loi suivant laquelle les différents termes se déduisent les uns des autres, et quelles que soient les valeurs équidifférentes ou non de la variable indépendante.

2° Les nouvelles formules sont d'une application très facile, surtout quand on emploie les logarithmes pour le calcul des rapports α, β, γ,... et des produits de ces rapports par les sommes des diverses valeurs des fonctions ou de leurs différences. Alors en effet toutes les opérations se réduisent à des additions ou à des soustractions.

3° A l'aide de nos formules, les approximations successives s'exécutent avec une facilité de plus en plus grande, attendu que les différences des divers ordres vont généralement en diminuant.

4° Nos formules permettent d'introduire à la fois dans le calcul les nombres fournis par toutes les observations données, et d'augmenter ainsi l'exactitude des résultats, en faisant concourir à ce but un très grand nombre d'expériences.

5° Elles offrent encore cet avantage qu'à chaque approximation

nouvelle les valeurs qu'elles fournissent pour les coefficients a, b, c, ... sont précisément celles pour lesquelles la plus grande erreur à craindre est la moindre possible.

6° Nos formules indiquent d'elles-mêmes le moment où le calcul doit s'arrêter, en fournissant alors des différences comparables aux erreurs d'observation.

7° Enfin les quantités qu'elles déterminent satisfont à deux équations de condition qui ne permettent pas de commettre la plus légère faute de calcul, sans que l'on s'en aperçoive presque immédiatement.

On trouvera dans les nouveaux Exercices de mathématiques de nombreuses applications de nos formules d'interpolation. J'en citerai une seule.

Soient l la longueur dans l'air d'une ondulation lumineuse relative à l'un des rayons du spectre solaire, et θ l'indice de réfraction de ce rayon passant de l'air dans un autre milieu. Il résulte des principes établis dans mon mémoire sur la dispersion de la lumière qu'on peut développer en série convergente $\left(\frac{1}{l}\right)^2$ suivant les puissances ascendantes de $\left(\frac{\theta}{l}\right)^2$, par conséquent $\left(\frac{\theta}{l}\right)^2$ et θ^2 suivant les puissances ascendantes de $\left(\frac{1}{l}\right)^2$. D'ailleurs un très habile observateur Fraunhofer a déterminé, pour diverses substances, les indices de réfraction des rayons pour lesquels les valeurs de l, en cent millionièmes de pouce, sont 2541, 2425, 2175, 1940, 1789, 1585, 1451, et trouvé pour les valeurs correspondantes de θ relatives à une certaine espèce de flintglass 1,626596 ; 1,628469 ; 1,633667 ; 1,640495 ; 1,646756 ; 1,658848 ; 1,669686.

Or la formule (VIII), réduite alors à

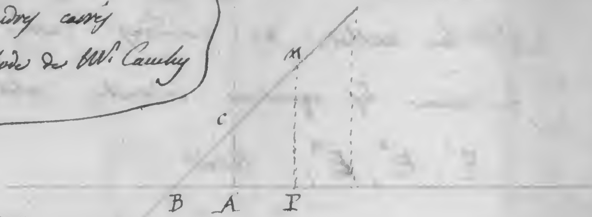
$$\theta^2 = 2{,}6112751 - 0{,}0256298\left(\frac{l_1}{l}\right)^2 + 0{,}1081567\left(\frac{l_1}{l}\right)^4 - 0{,}0649226\left(\frac{l_1}{l}\right)^6 + 0{,}019115\left(\frac{l_1}{l}\right)^8 - 0{,}002129\left(\frac{l_1}{l}\right)^{10},$$

reproduit exactement et sans la moindre altération les valeurs précédentes de θ.

par M. Augustin Cauchy, 26 Sept. 1835

3. 9bre 1835

Sur l'interpolation
1°. Par la méthode des moindres carrés
2°. Par une nouvelle méthode de Mr. Cauchy



L'origine des coordonnées de la droite BM soit en A et l'angle MBA soit = 45°: l'équation de cette droite sera $y = 1 + x$

de sorte que pour $x = x_1 = 0$ ... on aura exactement $y_1 = 1$

$x = x_2 = 1$ - - - - - - - - - - - $y_2 = 2$.

$x = x_3 = 2$ - - - - - - - - - - - $y_3 = 3$

Supposons maintenant qu'à chacune des valeurs x_1, x_2, x_3 de x on ait observé la valeur correspondante y_1, y_2, y_3 de y : cette observation dans ce cas est supposée faite avec le compas, c'est-à-dire les y_1, y_2, y_3 sont supposés pris avec la mesure divisée sur le papier ou sur le terrain.

Posons donc qu'en mesurant ainsi les ordonnées y, on ait obtenu

pour $x = x_1 = 0$ .... $y = y_1 = 0,98$

$x = x_2 = 1$ - - - $y = y_2 = 2,07$

$x = x_3 = 2$ - - $y = y_3 = 3,04$

et que par conséquent en supposant que la valeur de y est de la forme

$$y = a + bx$$

on demande les valeurs de a et b.

(suit de l'autre côté)

Par la méthode des moindres carrés on aura les équations suivantes relatives aux erreurs E', E'', E''', savoir

$$E' = a + bx_1 - y_1 \quad ; \quad E'' = a + bx_2 - y_2 \quad ; \quad E''' = a + bx_3 - y_3$$

et d'après la même méthode la somme des quarrés des erreurs sera

$$(a + bx_1 - y_1)^2 + (a + bx_2 - y_2)^2 + (a + bx_3 - y_3)^2$$

en cherchant le <u>minimum</u> de cette somme, en faisant varier d'abord la quantité a, seule ensuite la quantité b seule, on aura ces deux équations

$$\left.\begin{array}{l} a + bx_1 - y_1 \\ + a + bx_2 - y_2 \\ + a + bx_3 - y_3 \end{array}\right\} = 0 \qquad \left.\begin{array}{l} ax_1 + bx_1^2 - x_1 y_1 \\ + ax_2 + bx_2^2 - x_2 y_2 \\ + ax_3 + bx_3^2 - x_3 y_3 \end{array}\right\} = 0$$

c'est-à-dire

$$3a + b\int x - \int y = 0 \quad ; \quad a\int x + b\int x^2 - \int xy = 0$$

d'où l'on tire

$$a = \frac{\int y . \int x^2 - \int x . \int xy}{3\int x^2 - (\int x)^2} \quad ; \quad b = \frac{3\int xy - \int x . \int y}{3\int x^2 - (\int x)^2}.$$

Maintenant on, d'après les valeurs observées des x et y,

$\int y = 6,06$;

$\int x = 3$;

$\int x^2 = 5$;

$(\int x)^2 = 9$;

$\int x.y = 8,15$;

$\int x.\int y = 18,18$;

$\int y.\int x^2 = 30,30$;

$\int x.\int xy = 24,45$

d'où il vient $a = 0,975$

$b = 1,045$

et

(A) … $y = 0,975 + 1,045 . x$

pour l'équation cherchée de la droite.

Si maintenant nous déterminons les coefficients a et b de l'équation $y = a + bx$

à l'aide de la méthode de Mr. Cauchy

Nous aurons en comparant cette équation à l'équation (1) de son memoire $u = 1 = \text{const.}$

$v = x$

et $c = v = \vartheta = \&$.

Dans ce cas l'on aura d'après l'équat. (11) du même Memoire

$\alpha = \frac{1}{3}$ puisque les observations sont trois

et l'équation (III) du même memoire sera

$$y = \frac{1}{3}\int y_i + \Delta y$$

c'est-à-dire, à cause de $\int y_i = 6,06$,

suit de l'autre côté

$$(III) \qquad y = 2{,}02 + \Delta y$$

Cette equation donne pour les trois observations les trois valeurs suivantes de Δy, savoir

$$\left.\begin{array}{l} \Delta y_1 = -1{,}07 \\ \Delta y_2 = +0{,}05 \\ \Delta y_3 = +1{,}02 \end{array}\right| \text{ et } \int' \Delta y_i = 0 :$$

par conséquent les différences Δy ne peuvent pas être negligées

On formera pourtant les équations (IV) du meme memoire, savoir

$$x = \tfrac{1}{3}\int x_i + \Delta x \ ; \quad \Delta x = \mathcal{C}\int' \Delta x_i$$

C'est-à-dire à cause de $\int x_i = 3$, on aura

$$(IV) \qquad x = 1 + \Delta x \ ; \quad \Delta x = \mathcal{C}\cdot\int' \Delta x_i \text{ c'est-à-dire } x - 1 = \mathcal{C}\cdot\int' \Delta x_i$$

Mais la premiere de ces equations donne pour les trois observations,

$$\left.\begin{array}{l} \Delta x_1 = -1 \\ \Delta x_2 = 0 \\ \Delta x_3 = +1 \end{array}\right\} \text{ et par conséquent } \int' \Delta x_i = 0$$

par conséquent la derniere des equations (IV) donnera

$$\mathcal{C} = \frac{x-1}{\int' \Delta x_i} = \frac{x-1}{0}$$

et la valeur de y sera (d'après le meme memoire)

$$y = 2{,}02 + \frac{x-1}{0}\cdot\int' \Delta y_i = 2{,}02 + x - 1$$

à cause de $\int' \Delta y_i = 0 = \int' \Delta x_i$

Ainsi l'equation cherchée sera

$$(B) \qquad y = 1,02 + x$$

Or les equations (A) et (B) ne sont pas identiques.

si l'on cherche les erreurs de ces equations on trouve

pour l'equation (A) .... $y_1 - 0,975 - 1,045.x_1 = -0,025$;

$y_2 - 0,975 - 1,045\,x_2 = +0,050$;

$y_3 - 0,975 - 1,045\,x_3 = -0,025$;

La somme de ces erreurs est nulle ; et la somme de leurs carrés est $= 0,003750$

Pour l'equation (B) .. $y_1 - 1,02 - x_1 = -0,07$;

$y_2 - 1,02 - x_2 = +0,05$;

$y_3 - 1,02 - x_3 = +0,02$;

La somme de ces erreurs est encore nulle : mais la somme ~~d~~ de leurs carrés est $= 0,0078$

c'est-à-dire plus grande que pour l'equation (A)

---

(10)

Monsieur et très-estimable ami

Turin 4. 9bre 1835.

A Mr. Augustin Cauchy

Prague

(Bohême)

J'ai reçu l'exemplaire sur une nouvelle méthode d'interpolation que vous m'avez fait l'honneur de m'adresser: Je vous en remercie ~~sous tous les rapports et comme une marque du bon souvenir que vous conservez pour moi, et comme l'expression~~ bien cordialement, soit ~~parceque~~ particulièrement ~~que ces travaux m~~ ~~parceque cette méthode pourra m'être fort utile dans mes recherches~~ expérimentales ~~d'Hydrodynamique~~ soit parceque cet envoi est pour moi un cher témoignage ~~du bon~~ ~~souvenir~~ de votre bon souvenir pour moi. soit parce cette méthode pourra m'être fort utile dans mes expériences d'Hydrodynamique, ~~Jusqu'à présent dans mes travaux j'ai eu l'occasion de~~ dans lesquelles j'ai eu assez souvent ~~fait~~ ~~occasion de~~ de me servir ~~assez souvent~~ de la méthode des moindres carrés. ~~pour tirer entre eux les résultats de l'expérience.~~ En comparant cette méthode à la vôtre, j'y ai trouvé quelque différence dans les ~~résultats~~ ~~obtenus~~ valeurs des constantes: J'ai pris l'exemple idéal suivant ~~x, ..., y~~

Je suppose les valeurs observées comme il suit $x_1 = 0 \ldots y_1 = 0,95$

$x_2 = 1 \ldots y_2 = 2,07$

$x_3 = 2 \ldots y_3 = 3,04$

et je suppose que la forme de la fonction y ~~de y en~~ de x ~~soit~~ est l'équation d'une droite $y = a + bx$:

La méthode des moindres carrés
me donne $y = 0{,}975 + 1{,}045 \cdot x$
et d'après votre méthode je
trouve $y = 1{,}02 + x$

La somme des erreurs est nulle
pour l'une et pour l'autre de
ces deux equations : Mais la
somme des carrés des mêmes erreurs
est moindre dans la première
que dans la seconde. Il s'agit
de savoir dans quel cas l'une de ces equations
doit être prefer à l'autre ? Il parait que le but
des deux methodes n'est pas tout-à-fait
~~les même~~ le même, et par conséquent
aussi il faudra employer l'une
ou l'autre selon
la recherche qu'on se propose.

J'ai vu dans les annonces que
vous avez déjà publié un
volume des <u>nouveaux exercices</u>
<u>de Mathématiques</u>. Je desirerais
savoir dans quelle ville et
chez quel libraire il y en
a quelque dépot, car d'ici
au lieu où ils sont imprimés,
on ne trouve pas facilement
des libraires qui ~~aient des correspondans~~
veuillent se charger d'en faire
venir ?

En attendant conservez vous pour
vos amis et pour l'avancement
des Mathematiques et veuillez bien
agréer les nouvelles assurances
de la véritable estime et de la considération
très-distinguée, et du sincère
attachement que je vous ai voués depuis longtemps et avec lesquels j'ai
l'honneur d'être

Votre très devoué
Bidone Georges

P.S. Je me souviendrai toujours avec
un vif plaisir des entretiens scientifiques
de vos entretiens scientifiques dont vous m'avez fait jouir
pendant votre séjour à Turin

effectuée, et ainsi

Aurai-je à peine quelques minutes avant le départ du courrier, cependant je veux en disposer pour répondre immédiatement à l'aimable lettre que je viens de recevoir de vous, et à la question qu'elle renferme.

J'observerai d'abord que dans l'exemple cité par vous, les valeurs de x étant respectivement

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 2,$$

et la fonction y devant être de la forme $a + bx$, on aura

$$\Delta x = x - \tfrac{1}{3} S x_i = x - 1,$$

$$\Delta x_1 = -1, \quad \Delta x_2 = 0, \quad \Delta x_3 = 1,$$

$$S \Delta x_i = 1 + 0 + 1 = -\Delta x_1 \pm \Delta x_2 + \Delta x_3,$$

et par suite

$$(1) \qquad S \Delta y_i = -\Delta y_1 \pm \Delta y_2 + \Delta y_3.$$

Les valeurs de y étant d'ailleurs

$$y_1 = 0{,}95, \quad y_2 = 2{,}07, \quad y_3 = 3{,}04,$$

l'équation (1) donne à volonté

$$S'\Delta y_i = 2,04 \text{ ou } 2,14.$$

La moyenne entre ces deux valeurs, ou celle qu'on obtiendrait en réduisant la formule (1) à

$$S'\Delta y_i = -\Delta y_1 + \Delta y_3$$

sera

$$S'\Delta y_i = 2,09$$

En la substituant dans la nouvelle formule d'interpolation, savoir,

$$y = \alpha S y_i + \beta S'\Delta y_i$$

on trouvera

$$y = 2,02 + 1,045\,(x-1),$$

comme par la méthode des moindres carrés.

En général toutes les fois qu'une des valeurs de Δx devient nulle, il convient de supprimer le terme correspondant dans la somme $S'\Delta y$.

Au reste il peut arriver et il arrivera même généralement, que la nouvelle formule fournira des valeurs de α, β, qui ne seront pas identiques avec celles que fournirait la méthode des moindres carrés.

Particulièrement, si la série ordonnée suivant les puissances ascendantes de x, qui représente la valeur de y, était réduite à son premier terme. Alors l'une et l'autre méthode donneraient

$$y = \frac{Sy_i}{n}$$

n étant le nombre des valeurs particulières de y; c'est à dire que la valeur de y, supposée constante, serait la moyenne arithmétique entre les valeurs observées. Mais, lorsque l'on conserve dans la série deux ou plusieurs termes, les deux méthodes fournissent des nombres qui sont en général très peu différents, surtout si le nombre n est considérable, sans être rigoureusement égaux. Alors on a deux espèces d'erreurs à craindre, celles qui proviennent des observations et celles qui proviennent des termes négligés dans la série. La nouvelle méthode permet de corriger les erreurs de la seconde espèce par des approximations successives sans être obligé de recommencer le calcul à chaque approximation nouvelle et sans avoir à résoudre un grand nombre d'équations du premier degré, comme l'exigerait la méthode des moindres carrés, si on l'appliquait par exemple à la théorie de la dispersion de la

lumière. Je doute que personne eût le courage d'entreprendre les calculs que j'ai effectués très aisément à l'aide de la nouvelle formule, en se servant pour le même objet de la méthode des moindres carrés. Mais l'heure qui sonne m'avertit de fermer ma lettre et d'ailleurs je pourrai revenir une autre fois sur ce sujet.

Votre dévoué
A. L. Cauchy

Prague le 13 novembre 1835.

A Monsieur le Chevalier Bidone
Professeur à l'université de Turin
à Turin